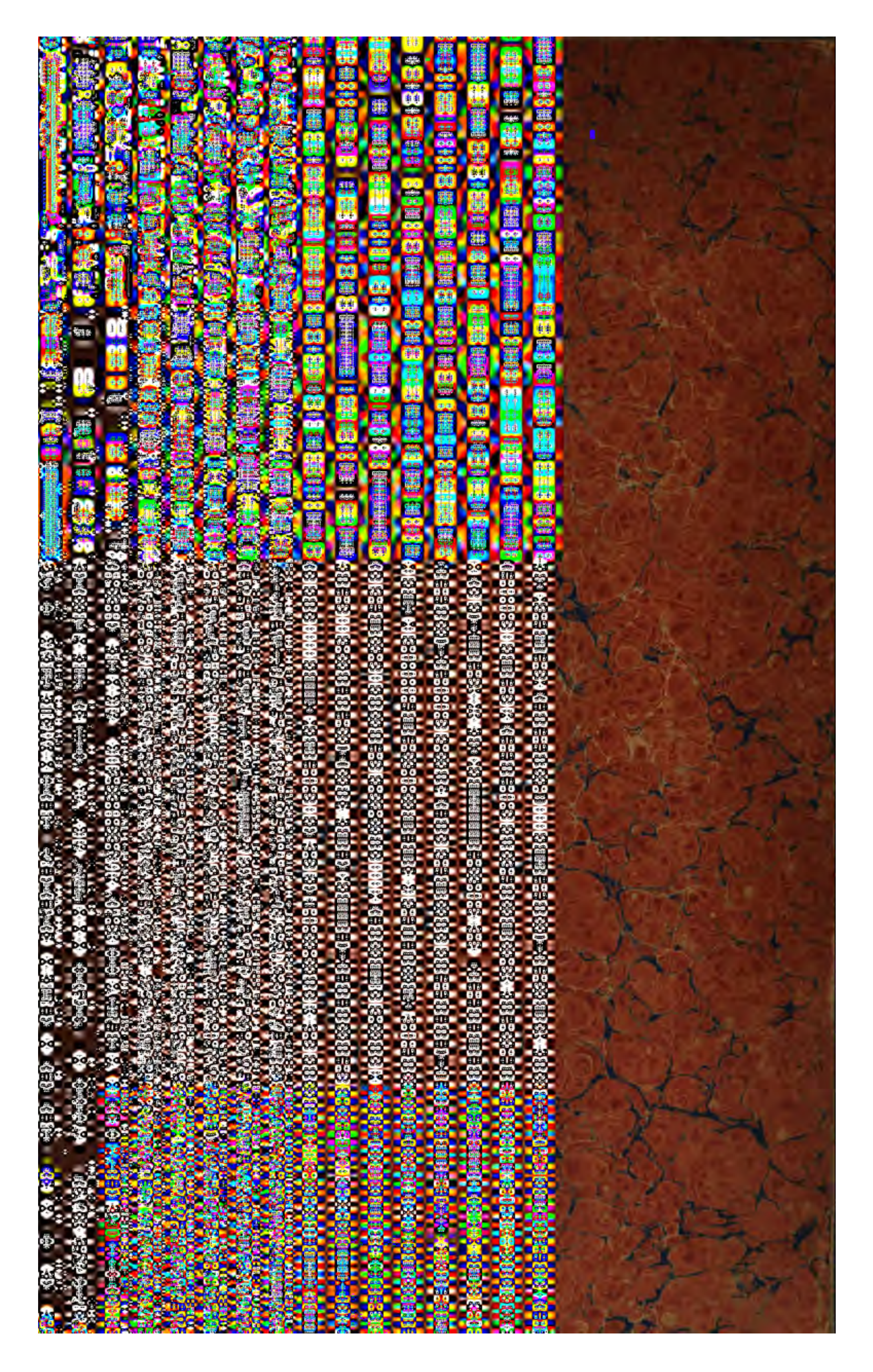


Zur

THEORIE DER EULERSCHEN INTEGRALE.

Von



M. A. STERN.

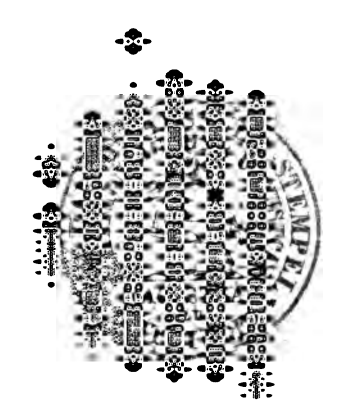
Abgedruckt aus den Göttinger Studien. 1847.

Göttingen

bei Vandenhoeck und Ruprecht.

1847.




STEMPEL





Zur

Theorie der Eulerschen Integrale.

Von

M. A. Stern.

1. Ich muss zuerst zum weiteren Gebrauche einige bekannte Formeln vorausschicken. Ist $x+1$ eine positive Grösse und bezeichnet man $\frac{d \log \Pi x}{dx}$ durch ψx, so hat man

$$1)\quad \psi x = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-xy}}{e^y - 1}\right) dy$$

Integrirt man diese Formel in Beziehung auf x zwischen den Grenzen x und o und bemerkt, dass $\Pi o = 1$, so ergiebt sich für alle positiven Werthe von x

$$2)\quad \log \Pi x = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\, dy}{y}\left(x - \frac{1-e^{-xy}}{1-e^{-y}}\right)$$

mithin auch

$$3)\quad \log \Pi(x-1) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\, dy}{y}\left[(x-1) - \frac{1-e^{-(x-1)y}}{1-e^{-y}}\right]$$

und da, 4) $\Pi x = x\, \Pi(x-1)$
so ist

$$5)\quad \log \Pi(x-1) + \log x = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{y}\left(x - \frac{1-e^{-xy}}{1-e^{-y}}\right)$$

und wenn man 3) von 5) abzieht

$$6)\quad \log x = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y} - e^{-xy}\right)\ ^{1)}.$$

Aus den Formeln 2) und 6) folgt, gelegentlich bemerkt, noch ein anderes interessantes Integral. Setzt man nämlich in 2) für x den Werth $\frac{1}{2}$, so hat man

$$\log \Pi\tfrac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{y}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1-e^{-\frac{1}{2}y}}{1-e^{-y}}\right).$$

Aus 6) folgt

$$\log \tfrac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y} - e^{-\frac{1}{2}y}\right).$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab und bemerkt, dass $\Pi\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, so ergiebt sich

$$7)\quad \tfrac{1}{2}\log \pi = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}y}+1} - \tfrac{1}{2}e^{-y}\right)$$
$$= \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{1}{e^{y}+1} - \tfrac{1}{2}e^{-2y}\right).$$

2. Schreibt man die Formel 1) in folgender Gestalt

$$8)\quad \psi x = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y} - \frac{y e^{-xy}}{e^{y}-1}\right)$$

und entwickelt $\dfrac{y}{e^{y}-1}$ nach den steigenden Potenzen von y,

---

[1]) Aus der Formel $\psi x = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-y}}{y} - \frac{1}{(1+y)^{x+1}}\right)dy$ welche Hr. Professor Dirichlet gegeben hat (Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 15. pg. 260.), ergiebt sich ebenso

$$\log x = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y} - \frac{(1+y)^{-(x+1)}}{\log(1+y)}\right)$$

so sind die zwei ersten Glieder der Entwickelung $1-\frac{y}{2}$, setzt man mithin $\frac{y}{e^y-1}=1-\frac{y}{2}+R$

so ist

$$9)\quad \psi x=\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y}-e^{-xy}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^\infty dy\, e^{-xy}-\int_0^\infty \frac{dy}{y}e^{-xy}R$$

oder, vermöge der Formel 6)

$$10)\quad \psi x=\log x+\frac{1}{2x}-\int_0^\infty \frac{dy}{y}e^{-xy}R$$

Da $R=\frac{y(e^y+1)}{2(e^y-1)}-1$

und dieser Ausdruck sich nicht ändert, wenn man $-y$ statt y setzt, so kann die Entwickelung von R nur gerade Potenzen von y enthalten. Setzt man also $\frac{y}{e^y-1}=fy$,

so ist allgemein $f^m o=o$, wenn m ungerade und grösser als 1 ist, und man hat

$$R=f^2 o.\frac{y^2}{1.2}+f^4 o.\frac{y^4}{1.2.3.4}\ldots.$$
$$+f^{2n}o.\frac{y^{2n}}{1.2\ldots 2n}+f^{2n+2}(hy).\frac{y^{2n+2}}{1.2\ldots 2n+2}$$

wo h eine Zahl bedeutet, die zwischen o und 1 liegt. Mithin ist

$$11)\quad \int_0^\infty \frac{dy}{y}e^{-xy}R$$
$$=\int_0^\infty dy\, e^{-xy}\left(f^2 o.\frac{y}{1.2}+f^4 o.\frac{y^3}{1.2.3.4}\ldots\right.$$
$$\left.+f^{2n}o.\frac{y^{2n-1}}{1.2..2n}+f^{2n+2}(hy).\frac{y^{2n+1}}{1.2\ldots 2n+2}\right)$$

Nun ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet,

$$12)\quad \int_o^\infty e^{-xy} y^n\, dy = \frac{1.2.3\ldots n}{x^{n+1}}$$

substituirt man diesen Werth in 11), so findet man

$$13)\quad \psi x = \log x + \frac{1}{2x} - f^2 o . \frac{1}{2x^2} - f^4 o . \frac{1}{4x^4} \ldots .$$

$$- f^{2n} o . \frac{1}{2n . x^{2n}} - \int_o^\infty f^{2n+2}(hy) . \frac{y^{2n+1}}{1.2\ldots 2n+2} e^{-xy}\, dy$$

Der Ausdruck ψx ist also in eine Reihe entwickelt, deren Ergänzungsglied durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt ist.

3. Aus der Gleichung $fy = \frac{y}{e^y - 1}$ folgt durch fortgesetzte Differentiation

$$(e^y - 1) f^1 y = 1 - e^y f y$$

$$(e^y - 1) f^2 y = - e^y (f y + 2 f^1 y)$$

und allgemein, wenn $m > 1$

$$14)\quad (e^y - 1) f^m y =$$

$$- e^y \left({}^m\overset{1}{\mathfrak{B}} f^{m-1} y + {}^m\overset{2}{\mathfrak{B}} f^{m-2} y \ldots + {}^m\overset{m-1}{\mathfrak{B}} f^1 y + f y \right)$$

wo
$${}^m\overset{k}{\mathfrak{B}} = \frac{m . m-1 \ldots . m-k+1}{1.2 \ldots . k}$$

Nun wurde schon früher bemerkt, dass $f^m o = o$, wenn m eine ungerade Zahl und grösser als 1 ist. Setzt man daher $y = o$ und bemerkt, dass

$$f o = 1;\quad f^1 o = -\tfrac{1}{2}$$

so ergiebt sich aus 14), wenn m ungerade ist,

$${}^m\overset{1}{\mathfrak{B}} f^{m-1} o + {}^m\overset{3}{\mathfrak{B}} f^{m-3} o + \ldots . {}^m\overset{m-2}{\mathfrak{B}} f^2 o - \frac{m-2}{2} = o$$

oder, wenn man $2m+1$ statt m setzt,

$$15)\quad {}^{2m+1}\overset{1}{\mathfrak{B}} f^{2m} o + {}^{2m+1}\overset{3}{\mathfrak{B}} f^{2m-2} o \ldots .$$

$$+ {}^{2m+1}\overset{2m-1}{\mathfrak{B}} f^2 o - \frac{2m-1}{2} = o$$

Bezeichnet aber B_m die m^{te} Bernoullische Zahl, so hat man nach der bekannten (Moivre'schen) Formel

$$^{2m+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, B_m - {}^{2m+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}\, B_{m-1} \ldots + {}^{2m+1}\overset{2m-1}{\mathfrak{B}}\, B_1 - \frac{2m-1}{2} = o$$

vergleicht man nun diesen Ausdruck mit der Formel 15) so ergiebt sich

$$f^{2m}\, o = B_m\,; \quad f^{2m-2}\, o = - B_{m-1} \text{ u. s. w.}$$

d. h. es ist allgemein

$$16) \quad f^{2n} = (-1)^{n-1} B_n$$

Substituirt man diesen Werth in 12), so ergiebt sich

$$17) \quad \psi x = \log x + \frac{1}{2x} - B_1 \cdot \frac{1}{2x^2} + B_2 \cdot \frac{1}{4x^4} \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} B_n \cdot \frac{1}{2n \cdot x^{2n}} - \int_0^\infty f^{2n+2}(hy)\, \frac{y^{2n+1}}{1.2\ldots 2n+2}\, e^{-xy}\, dy$$

Es ist dies die Formel, welche schon Euler in den Instit. calc. diff. jedoch nur für ganze Werthe von x und ohne das Ergänzungsglied entwickelt hat.

Integrirt man in Beziehung auf x, so findet man

$$18) \quad \log \Pi x = \text{Const.} + (x + \tfrac{1}{2}) \log x - x + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{x}{1}$$

$$- \frac{B_2}{3.4.x^3} \ldots + \int_0^\infty f^{2n+2}(hy) \cdot \frac{y^{2n}}{1.2\ldots 2n+2}\, e^{-xy}\, dy$$

Auch diese zuerst von Stirling gegebene Formel hat Euler a. a. O. für ganze Werthe von x und ohne das Ergänzungsglied entwickelt und zugleich bewiesen, dass die Constante $\frac{1}{2} \log 2\pi$ ist. Später hat man diesen Werth der Constanten noch auf mancherlei Weise, immer aber durch Einmischung fremdartiger Betrachtungen gefunden. Indem ich ihn vorläufig als bekannt annehme, werde ich jedoch in der Folge (§. 14.) zeigen, dass man ihn, ohne weitere Voraussetzung, unmittelbar aus den in §. 1. gegebenen Fundamentalformeln ableiten kann.

Dieselbe Betrachtung giebt auch das Ergänzungsglied der Moivre'schen Reihe, durch welche die Summe $\mathbf{S}\frac{1}{(1+x)^m}$ ausgedrückt wird, wo

$$\mathbf{S}\frac{1}{(1+x)^m}=\frac{1}{(1+x)^m}+\frac{1}{(2+x)^m}+\frac{1}{(3+x)^m}+\ldots\ldots$$

und $m-1$ eine positive Zahl ist. Aus der bekannten Gleichung

$$\int_0^\infty y^{m-1}\,e^{-xy}\,dy=\frac{\Pi(m-1)}{x^m}$$

folgt nämlich, wenn man statt x allmälich $x+1$, $x+2$ u. s. w. setzt und die sich hieraus ergebenden Werthe addirt

$$19)\quad \frac{1}{\Pi\,(m-1)}\int_0^\infty\frac{y^{m-1}\,e^{-xy}\,dy}{e^y-1}$$

$$=\mathbf{S}\frac{1}{(1+x)^m}=\frac{1}{\Pi\,(m-1)}\int_0^\infty y^{m-2}\,e^{-xy}\,fy\,dy$$

und hieraus, unter Berücksichtigung der Formel 12), indem man fy nach den steigenden Potenzen von y entwickelt,

$$20)\quad \mathbf{S}\frac{1}{(1+x)^m}=\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^m}+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{m}{x^{m+1}}\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}B_n}{1.2\ldots2n}\cdot\frac{\Pi\,(m+2n-2)}{\Pi\,(m-1)}\cdot\frac{1}{x^{m+2n-1}}$$

$$+\int_0^\infty f^{2n+2}(hy)\,\frac{y^{2n+m}}{1.2\ldots2n+2}\cdot e^{-xy}\,dy$$

4. Statt der Formel 2) kann man auch schreiben

$$\log\,\Pi x=\int_0^\infty\frac{e^{-y}}{y}\,dy\left(x-\frac{e^y-e^{-(x-1)y}}{e^y-1}\right)$$

$$=\int_0^\infty\frac{dy}{y}\left(e^{-y}x-\frac{1}{e^y-1}+\frac{e^{-xy}}{(e^y-1)}\right)$$

Setzt man nun statt $\frac{y}{e^y-1}$ seinen Werth $1-\frac{y}{2}+R$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xy}\,dy}{y(e^y-1)} = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}\,dy}{y^2}\left(1-\frac{y}{2}+R\right)$$

mithin wenn man

$$21)\quad Gx = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y}x + \frac{e^{-xy}}{y} - \tfrac{1}{2}e^{-xy} - \frac{1}{e^y-1}\right)$$

$$22)\quad Hx = \int_0^\infty \frac{dy}{y^2}\,e^{-xy}\,R$$

setzt,

$$23)\quad \log \Pi x = Gx + Hx$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 18), und 22) mit 11), so folgt

$$24)\quad Gx = (x+\tfrac{1}{2})\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

Setzt man in Formel 2) statt x den Werth $x+k$, wo k eine positive Zahl bedeutet, und integrirt alsdann zwischen den Grenzen $x=1$ und $x=o$, so findet man

$$\int_0^1 \log \Pi(x+k)\,dx = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left[(\tfrac{1}{2}+k)e^{-y} - \frac{1}{e^y-1} + \frac{e^{-(k+1)y}}{y}\right]$$

Nun ist nach 21)

$$G(k+1) = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left[e^{-y}(k+1) - \frac{1}{e^y-1} + \frac{e^{-(k+1)y}}{y} - \tfrac{1}{2}e^{-(k+1)y}\right]$$

folglich

$$G(k+1) - \int_0^1 \log \Pi(x+k)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{e^{-y} - e^{-(k+1)y}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\log(k+1)$$

Substituirt man nun statt $G(k+1)$ seinen Werth aus 24), so findet man

$$25)\quad \int_0^1 \log \Pi(x+k)\,dx = (k+1)\log(k+1) - (k+1) + \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

Diese Formel hat schon Herr Professor Raabe zuerst für ganze und später für rationale Werthe von k durch ziemlich verwickelte Betrachtungen gefunden [1]).

[1]) Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 25. S. 149. und Bd. 28. S. 13.

$$31)\quad \int_0^1 \frac{(1-z^{x})\,(1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\,(1-z^{x'''})}{1-z}\,\frac{dz}{\log\frac{1}{z}} =$$

$$\log.\frac{\Pi(x+x')\,\Pi(x+x_{,,})\,\Pi(x+x_{,,,})\Pi(x'+x_{,,})\Pi(x'+x_{,,,})\Pi(x_{,,}+x_{,,,})\Pi(x+x'+x_{,,}+x_{,,,})}{\Pi x.\Pi x'.\Pi x_{,,}.\Pi x_{,,,}.\Pi(x+x'+x_{,,})\Pi(x+x'+x_{,,,})\Pi(x+x_{,,}+x_{,,,})\Pi(x_{,}+x_{,,}+x_{,,,})}$$

Aus den Gleichungen 27), 29) und 31) ist nun leicht folgendes allgemeine Gesetz zu erkennen. Bezeichnet $J_{x,n}$ den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 \frac{(1-z^{x})\,(1-z^{x'})\,.\,.\,.\,(1-z^{x_{n-1}})}{1-z}\,\frac{dz}{\log\frac{1}{z}}$$

so findet man $J_{x,n}$ auf folgende Weise. Man bilde aus den Elementen x, $x_{,}$, ... x_{n-1} alle möglichen Combinationen. Man setze allen Formen, die eine gerade Anzahl Elemente enthalten, das Zeichen Π vor, bilde das Product der hieraus entspringenden Ausdrücke und bezeichne es durch $P_{x,n}$; eben so verfahre man mit den Formen, die eine ungerade Anzahl Elemente enthalten und nenne das hieraus entspringende Produkt $p_{x,n}$. Alsdann ist

$$32)\quad J_{x,n} = \log.\frac{P_{x,n}}{p_{x,n}}$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Gleichung ist leicht nachzuweisen. Gesetzt sie wäre bis zu einem bestimmten Werthe von n bewiesen, so hätte man also auch

$$33)\quad J_{x_{,},n} = \int_0^1 \frac{(1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\ldots\ldots(1-z^{x_n})}{1-z}\,\frac{dz}{\log\frac{1}{z}}$$

$$= \log.\frac{P_{x_{,},n}}{p_{x_{,},n}}$$

Statt der Gleichung 32) setze man

$$34)\quad J_{x,n} = \log.\frac{P_{x_{,},n-1}\,.\,R_x}{p_{x_{,},n-1}\,.\,r_x}$$

indem man bezüglich unter R_x und r_x das Produkt derjenigen in $P_{x,n}$ und $p_{x,n}$ enthaltenen Faktoren versteht, welche

das Element x enthalten. In der letzten Gleichung setze man $x + x_n$ an die Stelle von x, so erhält man

$$35)\quad \int_0^1 \frac{(1-z^{x+x_n})(1-z^{x_\prime})\ldots(1-z^{x_{n-1}})}{1-z}\,\frac{dz}{\log\frac{1}{z}}$$

$$= \log.\ \frac{P_{x_\prime, n-1} \cdot R_{x+x_n}}{p_{x_\prime, n-1} \cdot r_{x+x_n}}$$

Da jeder in R_x enthaltene Faktor aus einer geraden Anzahl Elemente zusammengesetzt ist, so ist jeder in R_{x+x_n} enthaltene Faktor aus einer ungeraden Anzahl Elemente zusammengesetzt; eben so folgt aus der Beschaffenheit von r_x, dass jeder in r_{x+x_n} enthaltene Faktor aus einer geraden Anzahl Elemente zusammengesetzt sein muss.

Zieht man 34) von 35) ab, so erhält man

$$36)\quad \int_0^1 \frac{z^x(1-z^{x_\prime})\ldots\ldots(1-z^{x_n})}{1-z}\,\frac{dz}{\log\frac{1}{z}} = \log.\ \frac{R_{x+x_n}}{r_{x+x_n}} \cdot \frac{r_x}{R_x}$$

und wenn man diese Gleichung von 33) abzieht,

$$37)\quad J_{x, n+1} = \log.\ \frac{P_{x_\prime, n} \cdot R_x \cdot r_{x+x_n}}{p_{x_\prime, n} \cdot r_x \cdot R_{x+x_n}}$$

Nun enthält $P_{x_\prime, n}$ alle Combinationen mit gerader Elementenzahl aus den Elementen $x_\prime, \ldots . x_n$; R_x alle Combinationen mit gerader Elementenzahl aus den Elementen x, $x_\prime, \ldots . x_{n-1}$, in welchen das Element x vorkömmt; r_{x+x_n} alle Combinationen mit gerader Elementenzahl aus den Elementen $x, x_\prime \ldots x_n$, welche zugleich x und x_n enthalten. Mithin sind in dem Produkte

$$P_{x_\prime, n} \cdot R_x \cdot r_{x+x_n}$$

sämmtliche Combinationsformen mit gerader Elementenzahl, gebildet aus den Elementen $x, x_\prime \ldots x_n$ enthalten, d. h. es ist

$$P_{x_\prime, n} \cdot R_x \cdot r_{x+x_n} = P_{x, n+1}$$

Eben so findet man

$$p_{x_\prime, n} \cdot r_x \cdot R_{x+x_n} = p_{x, n+1}$$

mithin

$$38)\quad J_{x\,,\,n+1} = \frac{P_{x\,,\,n+1}}{p_{x\,,\,n+1}}$$

Da nun die Gleichung 32) für $n = 1, 2, 3,$ schon oben bewiesen worden ist, so ist sie mithin allgemein richtig.

6. Zieht man 38) von 32) ab, so folgt eben so allgemein

$$39)\quad J_{x\,,\,n} - J_{x\,,\,n+1}$$

$$= \int_0^1 \frac{z^{x_n}(1-z^x)(1-z^{x_\prime})\ldots(1-z^{x_{n+1}})}{1-z} \frac{dz}{\log\frac{1}{z}}$$

$$= \log.\ \frac{P_{x\,,\,n}\,.\,p_{x\,,\,n+1}}{P_{x\,,\,n+1}\,.\,p_{x\,,\,n}}$$

oder wenn man $P_{x,n+1} = P_{x,n}\,.\,S_{x_n}$; $p_{x,n+1} = p_{x,n}\,.\,s_{x_n}$ setzt,

$$J_{x,n} - J_{x,n+1} = \log.\ \frac{s_{x_n}}{S_{x_n}}$$

Hier bedeuten S_{x_n} und s_{x_n} bezüglich das Produkt derjenigen in $P_{x,\,n+1}$ und $p_{x,\,n+1}$ enthaltenen Faktoren, in welchen das Element x_n erscheint. Um also den Werth des Integrals 39) zu finden, nehme man aus sämmtlichen Combinationen, die sich aus den Elementen $x, x_\prime \ldots x_n$ bilden lassen, diejenigen heraus, welche das Element x_n enthalten, setze allen diesen Formen das Zeichen Π vor und bilde aus den so erhaltenen Ausdrücken zwei Produkte, von welchen das eine alle Formen mit gerader Elementenzahl, das andere alle Formen mit ungerader Elementenzahl als Faktoren enthält; dividirt man das zweite Produkt durch das erste und nimmt die Logarithmen, so hat man den gesuchten Werth.

7. Sind sämmtliche Grössen $x, x', x_{\prime\prime} \ldots x_{n-1}$ der Einheit gleich, so ist

$$J_{x,\,n} = \int_0^1 (1-z)^{n-1} \frac{dz}{\log\frac{1}{z}}$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so ist die höchste $[n^{te}]$ Combinationsklasse aus den Elementen $x, x_\prime \ldots x_{n-1}$ eine gerade, mithin ist

$$P_{x,n} = \Pi n \,.\, [\Pi(n-2)]^{\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}} \ldots\ldots$$

$$p_{x,n} = [\Pi(n-1)]^n . \,[\Pi(n-3)]^{\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}} \ldots\ldots$$

mithin nach 32)

$$\int_0^1 (1-z)^{n-1} \frac{dz}{\log \frac{1}{z}}$$

$$= \log \Pi n - n \log \Pi (n-1) + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2} \log \Pi (n-2)$$

$$- \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3} \log \Pi (n-3) \ldots.$$

oder da allgemein $\Pi k = k\,\Pi(k-1)$

$$40) \quad \int_0^1 (1-z)^{n-1} \frac{dz}{\log \frac{1}{z}}$$

$$= \log n - (n-1) \log (n-1) + \frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2} \log (n-2) - \ldots..$$

Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so ist die höchste $[n^{te}]$ Combinationsklasse aus den Elementen $x, x, \ldots x_{n-1}$ eine ungerade, mithin ist

$$P_{x,n} = [\Pi(n-1)]^n \,[\Pi(n-3)]^{\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}} \ldots..$$

$$p_{x,n} = \Pi n \,[\Pi(n-2)]^{\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}} \ldots..$$

und

$$41) \quad \int_0^1 (1-z)^{n-1} \frac{dz}{\log \frac{1}{z}}$$

$$= -\left[\log n - (n-1)\log(n-1) + \frac{n\,1-.\,n-2}{1\,.\,2} \log(n-2)\ldots\right]$$

Aus den Formeln 40) und 41) folgt also für jede ganze Zahl n

$$\int_0^1 (z-1)^{n-1} \frac{dz}{\log z}$$

$$= \log n - (n-1) \log(n-1) + \frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2} \log(n-2) \ldots.$$

welche Formel schon Euler aus ganz anderen Principien gefunden hat [1]).

---

[1]) Instit. calc. integr. Suppl. V.

Man bemerke auch, dass das Integral

$$\int_0^1 (1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\ldots(1-z^{x_n})\,\frac{dz}{\log\frac{1}{z}}$$

als specieller Fall in der Formel 32) enthalten ist, indem man nur $x=1$ zu setzen braucht.

8. Die vorstehenden Betrachtungen führen aber noch weiter. Zunächst soll mit ihrer Hülfe der Werth des Integrals $\int_0^1 (1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\ldots\ldots(1-z^{x_n})\,\frac{dz}{(\log z)^2}$ gefunden werden, welches durch $K_{x_{,},\,n}$ bezeichnet werden mag.

Multiplicirt man die Gleichung 28) mit dx und integrirt zwischen den Grenzen $x=o$ und $x=1$, so erhält man

$$42)\quad \int_0^1 (1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\,\frac{dz}{(\log z)^2}$$
$$=\int_0^1 \log.\,\frac{\Pi x\,.\,\Pi(x+x_{,}+x_{,,})}{\Pi(x+x')\,\Pi(x+x'')}\,dx$$

da
$$\int_0^1 z^x\,dx = \frac{z-1}{\log z}$$

Aus 42) folgt

$$43)\quad \int_0^1 (1-z^{x_{,}+x_{,,,}})\,(1-z^{x_{,,}})\,\frac{dz}{(\log z)^2}$$
$$=\int_0^1 \log.\,\frac{\Pi x\,.\,\Pi(x+x_{,}+x_{,,}+x_{,,,})}{\Pi(x+x_{,}+x_{,,,})\,\Pi(x+x_{,,})}\,dx$$

und, wenn man 42) von 43) abzieht,

$$44)\quad \int_0^1 z^{x_{,}}(1-z^{x_{,,}})\,(1-z^{x_{,,,}})\,\frac{dz}{(\log z)^2}$$
$$=\int_0^1 \log.\,\frac{\Pi(x+x_{,})\,\Pi(x+x_{,}+x_{,,}+x_{,,,})}{\Pi(x+x_{,}+x_{,,})\,\Pi(x+x_{,}+x_{,,,})}\,dx$$

Auch ist nach 42)

$$\int_0^1 (1-z^{x_{,,}})\,(1-z^{x_{,,,}})\,\frac{dz}{(\log z)^2}$$
$$=\int_0^1 \log.\,\frac{\Pi x\,.\,\Pi(x+x_{,,}+x_{,,,})}{\Pi(x+x_{,,})\,\Pi(x+x_{,,,})}\,dx$$

und, wenn man von dieser Gleichung die vorhergehende abzieht,

$$45)\quad \int_0^1 (1-z^{x_{\prime}})\,(1-z^{x_{\prime\prime}})\,(1-z^{x_{\prime\prime\prime}})\frac{dz}{(\log z)^2}$$

$$=\int_0^1 \log\frac{\Pi x\,.\,\Pi(x+x_{\prime}+x_{\prime\prime})\,\Pi(x+x_{\prime}+x_{\prime\prime\prime})\,\Pi(x+x_{\prime\prime}+x_{\prime\prime\prime})}{\Pi(x+x_{\prime})\,\Pi(x+x_{\prime\prime})\,\Pi(x+x_{\prime\prime\prime})\,\Pi(x+x_{\prime}+x_{\prime\prime}+x_{\prime\prime\prime})}\,dx$$

Hält man die Formeln 42) und 45) zusammen, so erkennt man leicht das allgemeine Gesetz, welches sich, wie folgt, aussprechen lässt. Man bilde aus den Elementen x, $x_{\prime}$, . . . x_n alle Combinationen, welche das Element x enthalten, setze allen Formen das Zeichen Π vor und bilde aus den hierdurch entstehenden Ausdrücken zwei Produkte, von welchen das eine aus allen eine gerade Elementenzahl enthaltenden, das andere aus allen eine ungerade Elementenzahl enthaltenden Ausdrücken, als Faktoren, zusammengesetzt ist. Bezeichnen $E_{x,\,n}$ und $e_{x,\,n}$ bezüglich diese zwei Produkte, so ist

$$46)\quad K_{x_{\prime},n} = \int_0^1 \log\frac{e_{x,\,n}}{E_{x,\,n}}\,dx$$

Der Beweis der allgemeinen Gültigkeit dieser Formel ist eben so zu führen, wie bei der Formel 32), weshalb ich ihn übergehe.

9. Nun bemerke man aber, dass sowohl log. $e_{x,\,n}$ als log. $E_{x,\,n}$ die Summe einer Anzahl Logarithmen ist, von welchen jeder die Form log. $\Pi(x+k)$ hat, so dass man auch

$$47)\quad K_{x_{\prime},n} = \Sigma\int_0^1 \log.\,\Pi(x+k')\,dx$$
$$-\,\Sigma\int_0^1 \log.\,\Pi(x+k'')\,dx$$

setzen kann, wo statt k' der Werth Null und ausserdem alle Combinationen aus $x_{\prime}\ldots x_n$ mit gerader Elementenzahl, statt k'' alle Combinationen aus $x_{\prime}\ldots x_n$ mit ungerader Elementenzahl zu substituiren sind.

Nun ist nach 25)

$$25') \int_0^1 \log \Pi(x+k)dx = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + (k+1)\log(k+1) - k - 1$$

es kann also, mit Hülfe dieser Gleichung, der Ausdruck 47) in einen anderen verwandelt werden, welcher von den Integralzeichen befreit ist. Hierbei können aber noch bedeutende Abkürzungen angebracht werden. Zunächst beachte man Folgendes. Die Anzahl der Combinationsformen aus x, $x_{,}$ . . . . x_n, welche das Element x und eine ungerade Elementenzahl enthalten, ist offenbar, da x selbst eine dieser Formen ist, um eine Einheit grösser als die Anzahl der Combinationsformen aus $x_{,}$, $x_{,,}$ . . . x_n, welche eine gerade Elementenzahl enthalten. Dagegen ist die Anzahl der Combinationen aus x, $x_{,}$, . . . x_n, welche das Element x und eine gerade Elementenzahl enthalten, dieselbe, wie die Anzahl der Combinationen aus $x_{,}$, $x_{,,}$, . . . x_n, welche eine ungerade Elementenzahl enthalten. Diese letztere Anzahl ist aber ebenfalls um eine Einheit grösser als die Anzahl der Combinationen aus $x_{,}$, $x_{,,}$ . . . x_n, welche eine gerade Elementenzahl enthalten [1]). Es enthält also $E_{x,n}$ eben so viel Faktoren als $e_{x,n}$ und mithin kommt in dem Werthe von $K_{x,,n}$ der Ausdruck $\frac{1}{2}$ log. 2π eben so oft additiv als subtraktiv vor, verschwindet also ganz aus der Rechnung. Aus demselben Grunde verschwinden auch die negativen Einheiten, welche von dem in 25') enthaltenen — 1 herrühren. Mithin kann man statt 47) einfacher schreiben

$$K_{x,,n} = \Sigma\,(k'+1)\log(k'+1) - \Sigma\,(k''+1)\log(k''+1) + \Sigma k'' - \Sigma k'$$

Aber auch diese Formel ist noch zu vereinfachen.

Bei den Combinationen ohne Wiederholung kommt nämlich ein jedes Element eben so oft in den geraden wie in den ungeraden Klassen vor [2]), mithin ist die Summe aller in

---

[1]) Vrgl. Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 21. S. 91.

[2]) Hat man n Elemente, so kommt ein jedes Element in der

den geraden Klassen enthaltenen Elemente der Summe aller in den ungeraden Klassen enthaltenen gleich, oder die Differenz dieser zwei Summen Null. Diese Differenz wird aber durch $\Sigma k'' - \Sigma k'$ ausgedrückt, mithin ist

$$\Sigma\, k'' - \Sigma\, k' = o$$

und

48) $K_{x_{,},n} = \Sigma(k'+1)\log(k'+1) - \Sigma(k''+1)\log(k''+1)$

Man hat also z. B.

$$\int_o^1 (1-z^{x_{,}})\,(1-z^{x_{,,}})\,(1-z^{x_{,,,}})\,\frac{dz}{(\log z)^2} =$$

$$(x_{,}+x_{,,}+1)\log(x_{,}+x_{,,}+1) + (x_{,}+x_{,,,}+1)\log(x_{,}+x_{,,,}+1)$$
$$+\,(x_{,,}+x_{,,,}+1)\,\log\,(x_{,,}+x_{,,,}+1)$$
$$-\,(x_{,}+1)\,\log\,(x_{,}+1) - (x_{,,}+1)\,\log\,(x_{,,}+1)$$
$$-\,(x_{,,,}+1)\log(x_{,,,}+1) - (x_{,}+x_{,,}+x_{,,,})\log(x_{,}+x_{,,}+x_{,,,})$$

In dem besonderen Falle, wenn alle Exponenten gleich sind, verwandelt sich diese Formel in

$$\int_o^1 (1-z^{x_{,}})^n\,\frac{dx}{(\log z)^2} = \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,(2x_{,}+1)\log(2x_{,}+1)$$
$$+\,\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\log(4x_{,}+1)+\dots$$
$$-\,n(x_{,}+1)\log(x_{,}+1) - \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,\log(3x_{,}+1) - \dots$$

10. Man hat ferner

$$\int_o^1 z^{x_{,}}(1-z^{x_{,,}})\,\dots\,(1-z^{x_{n+1}})\,\frac{dz}{(\log z)^2} =$$
$$\int_o^1 (1-z^{x_{,}+x_{n+1}})\,(1-z^{x_{,,}})\dots(1-z^{x_n})\,\frac{dz}{(\log z)^2} -$$
$$\int_o^1 (1-z^{x_{,}})\,(1-z^{x_{,,}})\,\dots\,(1-z^{x_n})\,\frac{dz}{(\log z)^2}$$

Bezeichnet man also durch l' und l'' das, was aus k'

---

ersten Klasse einmal, in der zweiten $n-1$ mal, in der dritten $\frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2}$ mal u. s. w. vor, es ist aber

$$1-(n-1)+\frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2}\dots = (1-1)^{n-1} = o$$

und k'' wird, wenn man $x_, + x_{n+1}$ an die Stelle von $x_,$ setzt, so erhält man mithin

$$\int_0^1 z^{x_,} (1-z^{x_{,,}}) \ldots (1-z^{x_{n+1}}) \frac{dz}{(\log z)^2} =$$
$$\Sigma(l'+1)\log(l'+1) + \Sigma(k''+1)\log(k''+1)$$
$$-\Sigma(k'+1)\log(k'+1) - \Sigma(l''+1)\log(l''+1)$$

Begreiflich heben sich aber in den zwei Differenzen

$$\Sigma(l'+1)\log(l'+1) - \Sigma(k'+1)\log(k'+1)$$
$$\Sigma(k''+1)\log(k''+1) - \Sigma(l''+1)\log(l''+1)$$

alle Glieder auf, welche nicht $x_,$ enthalten. Man kann also kürzer setzen

$$49) \quad \int_0^1 z^{x_,} (1-z^{x_{,,}}) \ldots (1-z^{x_{n+1}}) \frac{dz}{(\log z)^2}$$
$$= \Sigma(x_, + x_{n+1} + m' + 1) \log(x_, + x_{n+1} + m' + 1)$$
$$+ \Sigma(x_, + m'' + 1) \log(x_, + m'' + 1)$$
$$- \Sigma(x_, + x_{n+1} + m'' + 1) \log(x_, + x_{n+1} + m'' + 1)$$
$$- \Sigma(x_, + m' + 1) \log(x_, + m' + 1)$$

indem man bezüglich unter $\Sigma m'$ und $\Sigma m''$ die Summe der Werthe versteht, welche man erhält, wenn man allmälig statt m' alle Combinationen mit ungerader Elementenzahl, statt m'' Null und alle Combinationen mit gerader Elementenzahl, gebildet aus den Elementen x_2, $x_3 \ldots x_n$, nimmt.

Da die Formel 49) in Beziehung auf die Grössen $x_{,,}$, $x_{,,,} \ldots x_{n+1}$ symmetrisch ist, so kann man in den Ausdrücken $x_, + x_{n+1} + m' + 1$, $x_, + x_{n+1} + m'' + 1$, $x_, + m' + 1$, $x_, + m'' + 1$ das Element x_{n+1} mit jedem der Elemente $x_{,,} \ldots x_n$ vertauschen. Man könnte also z. B. statt dieser Ausdrücke auch setzen $x_, + x_2 + m' + 1$, $x_, + x_2 + m'' + 1$, $x_, + m' + 1$, $x_, + m'' + 1$, nur müsste man nun statt m' und m'' bezüglich alle Combinationen mit ungerader und gerader Elementenzahl, gebildet aus den Elementen $x_3 \ldots x_{n+1}$, substituiren.

Setzt man die Exponenten $x_{,,}$, $x_{,,,} \ldots x_{n+1}$ unter einander gleich, so erhält man aus 49) zunächst

$$\int_0^1 z^{x_,} (1-z^{x_{,,}})^n \frac{dz}{(\log z)^2} =$$

$$(n-1)\,(x_, + 2x_{,,} + 1) \log (x_, + 2x_{,,} + 1)$$
$$+ \frac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3} (x_, + 4x_{,,} + 1) \log (x_, + 4x_{,,} + 1) + \ldots$$
$$+ (x_, + 1) \log (x_, + 1) + \frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2} (x_, + 2x_{,,} + 1) \log (x_, + 2x_{,,} + 1)$$
$$+ \frac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3\,.\,n-4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} (x_, + 4x_{,,} + 1) \log (x_, + 4x_{,,} + 1) + \ldots$$
$$- (x_, + x_{,,} + 1) \log (x_, + x_{,,} + 1)$$
$$- \frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2} (x_, + 3x_{,,} + 1) \log (x_, + 3x_{,,} + 1) - \ldots\ldots$$
$$- (n-1)\,(x_, + x_{,,} + 1) \log (x_, + x_{,,} + 1)$$
$$- \frac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3} (x_, + 3x_{,,} + 1) \log (x_, + 3x_{,,} + 1) - \ldots\ldots$$

und wenn man die zusammengehörenden Glieder addirt,

$$\int_0^1 z^{x_,} (1-z^{x_{,,}})^n \frac{dz}{(\log z)^2} =$$

$$(x_, + 1) \log (x_, + 1) - n\,(x_, + x_{,,} + 1) \log (x_, + x_{,,} + 1)$$
$$+ \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2} (x_, + 2x_{,,} + 1) \log (x_, + 2x_{,,} + 1)$$
$$- \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3} (x_, + 3x_{,,} + 1) \log (x_, + 3x_{,,} + 1) + \ldots$$

oder kürzer, wenn man $\Delta x_, = x_{,,}$ setzt,

$$\int_0^1 z^{x_,} (1-z^{x_{,,}})^n \frac{dz}{(\log z)^2} = (-1)^n \Delta_n \left[(x_, + 1) \log (x_, + 1)\right]$$

also auch

$$50) \quad \int_0^1 z^{x_,-1} (z^{x_{,,}} - 1)^n \frac{dz}{(\log z)^2} = \Delta_n \left[x_, \log x_,\right]$$

11. Aus der Formel 49) kann man nun ohne Schwierigkeit, wenn man immer denselben Gang befolgt, Integrale von höherem Range ableiten. Multiplicirt man diese Formel mit dx' und integrirt zwischen den Grenzen $x' = x'$ und $x' = o$, so findet man, wenn man sich der Formel

$$\int_0^{x'} (x'+k) \log (x'+k)\, d x' = \tfrac{1}{2} (x'+k)^2 \log (x'+k)$$
$$- \frac{k^2}{2} \log k - \tfrac{1}{4} (x'+k)^2 - \tfrac{1}{4} k^2$$

bedient,

$$\int_0^1 (1-z^{x'}) (1-z^{x''}) \ldots . (1-z^{x_{n+1}}) \frac{dz}{(\log z)^3} =$$
$$\tfrac{1}{2} \Sigma(x'+m'+1)^2 \log (x'+m'+1) - \tfrac{1}{2} \Sigma(m'+1)^2 \log (m'+1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma(x_, + x_{n+1} + m''+1)^2 \log (x_, + x_{n+1} + m''+1)$$
$$- \tfrac{1}{2} \Sigma(x_{n+1} + m''+1)^2 \log (x_{n+1} + m''+1)$$
$$- \tfrac{1}{2} \Sigma(x_, + x_{n+1} + m'+1)^2 \log (x_, + x_{n+1} + m'+1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma(x_{n+1} + m'+1) \log (x_{n+1} + m'+1)$$
$$- \tfrac{1}{2} \Sigma(x_, + m''+1)^2 \log (x_, + m''+1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma(m''+1)^2 \log (m''+1)$$
$$- \tfrac{1}{4} \Sigma(x_, + m'+1)^2 + \tfrac{1}{4} \Sigma(m'+1)^2$$
$$- \tfrac{1}{4} \Sigma(x_, + x_{n+1} + m''+1)^2 + \tfrac{1}{4} \Sigma(x_{n+1} + m''+1)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4} \Sigma(x_, + x_{n+1} + m'+1)^2 - \tfrac{1}{4} \Sigma(x_{n+1} + m'+1)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4} \Sigma(x_, + m''+1)^2 - \tfrac{1}{4} \Sigma(m''+1)^2$$

In diesem Ausdrucke müssen sich aber die Glieder, welche keine Logarithmen enthalten, identisch aufheben. Setzt man nämlich eine der Grössen $x_,$, $x_{,,}$ ... x_{n+1} gleich Null, während die anderen ganz unbestimmt bleiben, so wird der Werth des Integrals Null. Dann muss offenbar die Summe der Glieder, welche keine Logarithmen enthalten, für sich genommen, Null werden. Entwickelt man daher diese Summe und sondert die Glieder, welche irgend ein Element, z. B. $x_,$ enthalten, ab, so dass diese Summe die Form $A x_, + B$ annimmt, so hat man, wenn man $x_, = o$ setzt,

$$A x_, + B = o$$

mithin auch, da B nicht von $x_,$ abhängt, $B = o$. Diese letzte Gleichung muss eine identische sein, und da der Ausdruck $A x_, + B$ in Beziehung auf die Elemente $x_,$, x_2 . . . x_{n+1} symmetrisch sein muss, müssen sich mithin auch die

Glieder, welche $x_,$ enthalten, 'identisch aufheben. Mithin hat man schliesslich

$$51)\quad \int_0^1 (1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\ldots(1-z^{x_{n+1}})\,\frac{dz}{(\log z)^3} =$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Big[& \Sigma(x'+m'+1)^2 \log(x'+m'+1) - \Sigma(m'+1)^2 \log(m'+1) \\
& + \Sigma(x_, + x_{n+1} + m''+1)^2 \log(x_, + x_{n+1} + m''+1) \\
& - \Sigma(x_{n+1} + m''+1) \log(x_{n+1} + m''+1) \\
& - \Sigma(x_, + x_{n+1} + m'+1)^2 \log(x_, + x_{n+1} + m'+1) \\
& + \Sigma(x_{n+1} + m'+1)^2 \log(x_{n+1} + m'+1) \\
& - \Sigma(x_, + m''+1)^2 \log(x_, + m''+1) \\
& + \Sigma(m''+1)^2 \log(m''+1)\Big]
\end{aligned}$$

Bezeichnet man durch p' und p'' das, was aus m' und m'' wird, wenn man das Element $x_{,,}$ weglässt, so folgt aus der vorhergehenden Formel

$$52)\quad \int_0^1 (1-z^{x''})\,(1-z^{x_3})\ldots(1-z^{x_{n+1}})\,\frac{dz}{(\log z)^3} =$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Big[& \Sigma(x''+p'+1)^2 \log(x''+p'+1) - \Sigma(p'+1)^2 \log(p'+1) \\
& + \Sigma(x_{,,} + x_{n+1} + p''+1)^2 \log(x_{,,} + x_{n+1} + p''+1) \\
& - \Sigma(x_{n+1} + p''+1)^2 \log(x_{n+1} + p''+1) \\
& - \Sigma(x_{,,} + x_{n+1} + p'+1)^2 \log(x_{,,} + x_{n+1} + p'+1) \\
& + \Sigma(x_{n+1} + p'+1)^2 \log(x_{n+1} + p'+1) \\
& - \Sigma(x_{,,} + p''+1)^2 \log(x'' + p''+1) \\
& + \Sigma(p''+1)^2 \log(p''+1)\Big]
\end{aligned}$$

Zieht man nun 51) von 52) ab, so erhält man mithin den Werth des Integrals

$$\int_0^1 z^{x'}(1-z^{x''})\ldots.(1-z^{x_{n-1}})\,\frac{dz}{(\log z)^3}$$

Man sieht nun, wie man durch die Fortsetzung desselben Verfahrens zur Bestimmung der Werthe der zwei allgemeinen Integrale

$$53)\quad \int_0^1 (1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\ldots(1-z^{x_n})\,\frac{dz}{(\log z)^m}$$

und

$$54)\quad \int_0^1 z^{x'}(1-z^{x''})\ldots.(1-z^{x_n})\,\frac{dz}{(\log z)^m}$$

gelangt, sobald m eine ganze positive Zahl bedeutet. Es versteht sich übrigens von selbst, dass diese Betrachtungen nicht auf die Fälle ausgedehnt werden dürfen, in welchen der Werth des Integrals nothwendig unendlich gross wird. So z. B. behält der Ausdruck

$$\frac{(1-z^{x'})\,(1-z^{x''})\ldots(1-z^{x_n})}{(\log z)^m}$$

wenn man $z=1$ setzt, nur dann einen endlichen Werth, wenn n nicht kleiner als m ist, es kann also auch nur unter dieser Beschränkung der Werth des Integrals 53) gesucht werden.

12. In dem besonderen Falle, wenn die Elemente $x_{\prime\prime}, x_3 \ldots x_{n+1}$ unter einander gleich sind, verwandelt sich die Formel 51) nach gehöriger Reduktion in

$$\int_0^1 (1-z^{x_\prime})\,(1-z^{x_{\prime\prime}})^n \frac{dz}{(\log z)^3} =$$

$$-\tfrac{1}{2}\Big[(x_\prime+1)^2\log(x'+1) - n\,(x_\prime+x_{\prime\prime}+1)^2\log(x_\prime+x_{\prime\prime}+1)$$
$$+\frac{n.n-1}{1.2}(x_\prime+2x_{\prime\prime}+1)^2\log(x_\prime+2x_{\prime\prime}+1)-\ldots\Big]$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big[n\,(x_{\prime\prime}+1)^2\log(x_{\prime\prime}+1)$$
$$-\frac{n.n-1}{1.2}(2x_{\prime\prime}+1)^2\log(2x_{\prime\prime}+1)+\ldots\Big]$$

Aus 52) folgt unter derselben Voraussetzung

$$\int_0^1 (1-z^{x_{\prime\prime}})^n \frac{dz}{(\log z)^3} =$$
$$-\tfrac{1}{2}\Big[n\,(x_{\prime\prime}+1)^2\log(x_{\prime\prime}+1)$$
$$-\frac{n.n-1}{1.2}(2x''+1)^2\log(2x_{\prime\prime}+1)+\ldots\Big]$$

also
$$\int_0^1 z^{x_\prime}(1-z^{x_{\prime\prime}})^n \frac{dz}{(\log z)^3} =$$
$$\tfrac{1}{2}\Big[(x_\prime+1)^2\log(x'+1) - n\,(x_\prime+x_{\prime\prime}+1)^2\log(x_\prime+x_{\prime\prime}+1)$$
$$+\frac{n.n-1}{1.2}(x_\prime+2x_{\prime\prime}+1)^2\log(x_\prime+2x_{\prime\prime}+1)-\ldots\Big]$$

oder, wenn man wieder $\Delta x_\prime = x_{\prime\prime}$ setzt,

$$\int_0^1 z^{x'}(1-z^{x''})^n \frac{dz}{(\log z)^3}$$
$$=(-1)^n \cdot \tfrac{1}{2}\, \Delta_n\, (x_{,}+1)^2 \log (x_{,}+1)$$

d. h.

$$55)\quad \int_0^1 z^{x_{,}-1}\, (z^{x''}-1)^n \frac{dz}{(\log z)^3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \Delta_n\, [x_{,}^2 \log x_{,}]$$

Man kann diese Gleichung auch unmittelbar aus der Gleichung 50) ableiten, wenn man die letztere Gleichung mit dx' multiplicirt und zwischen den Grenzen $x'=x'$ und $x'=1$ integrirt, und wenn man dasselbe Verfahren wiederholt, so findet man

$$56)\quad \int_0^1 z^{x_{,}-1}\, (z^{x''}-1)^n \frac{dz}{(\log z)^m}$$
$$= \frac{1}{2\ldots\ldots m-1}\, \Delta_n\, (x_{,}^{m-1} \log x_{,})$$

Diese Gleichung stimmt mit einer Formel überein, welche Cauchy auf ganz anderem Wege gefunden hat [1]). Speciellere Fälle hat schon Legendre vermittelst einer Methode gefunden [2]), die von Euler herrührt [3]).

13. Durch sehr einfache Substitutionen kann man unmittelbar aus dem Vorhergehenden eine neue Reihe Integrale ableiten. Setzt man z. B. in 28) statt z den Werth z^2, wodurch die Integrationsgrenzen nicht geändert werden, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{z^{2x+1}(1-z^{2x_{,}})(1-z^{2x_{,,}})}{1-z^2}\frac{dz}{\log z} = \log. \frac{\Pi(x+x_{,})\,\Pi(x+x_{,,})}{\Pi x\,.\,\Pi(x+x_{,}+x_{,,})}$$

Setzt man in dieser Gleichung $x'=\frac{1}{2}$, so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{z^{2x+1}(1-z^{2x''})}{1+z}\frac{dz}{\log z} = \log. \frac{\Pi(x+\frac{1}{2})\,\Pi(x+x'')}{\Pi x\;.\;\Pi(x+x''+\frac{1}{2})}$$

---

[1]) Mémoires sur diverses formules etc. in d. Journ. de l'école polytechn. Cah. 28. pg. 157.

[2]) Exercices de calc. integr. T. 1. pg. 371.

[3]) Instit. calc. integr. T. 4. Suppl. V

oder wenn man $2x+1=\alpha$; $2x_{,,}=\alpha_{,}$ setzt,

$$\int_0^1 \frac{z^\alpha (1-z^{\alpha_,})}{1+z} \frac{dz}{\log z} = \log. \frac{\Pi\frac{\alpha}{2} \cdot \Pi\frac{\alpha+\alpha_,-1}{2}}{\Pi\frac{\alpha-1}{2} \cdot \Pi\frac{\alpha+\alpha_,}{2}}$$

Diese specielle Gleichung hat schon Herr Professor Kummer auf gänzlich verschiedenem Wege gefunden [1]). Das hier angewandte Verfahren führt aber zu Allgemeinerem, indem dieselbe Substitution auf die Gleichung 36) angewandt, unmittelbar den Werth des Integrals

$$\int_0^1 \frac{z^\alpha (1-z^{\alpha_,})(1-z^{\alpha_2})\ldots\ldots(1-z^{\alpha_n})}{1+z} \frac{dz}{\log z}$$

giebt.

14. Ich habe schon oben bemerkt, dass man den Werth der in 18) vorkommenden Constanten unmittelbar aus den hier zu Grunde gelegten Fundamentalformeln ableiten kann. Dies geschieht auf folgende Weise. Multiplicirt man die Formel 6) mit dx und integrirt zwischen den Grenzen $x=x$ und $x=a$, so erhält man

$$57)\quad \int_a^x \log x\,dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y}x + \frac{e^{-xy}}{y} - e^{-y}.a - \frac{e^{-ay}}{y}\right)$$

$$= x\log x - x - a\log a + a$$

also in dem besonderen Falle, wenn man die obere Grenze $=1$, die untere $=\frac{1}{2}$ setzt,

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y} + \frac{e^{-y}}{y} - \tfrac{1}{2}e^{-y} - \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\log 2$$

oder

$$58)\quad \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y} - \tfrac{1}{2}e^{-y} - \frac{e^{-y}}{y}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log 2$$

[1]) Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 17. pg. 224. Formel 60. Im Nenner muss es $\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)$ statt $\Pi\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)$ heissen.

Aus dem Vergleich von 21) mit 18) folgt, wenn man $x = \frac{1}{2}$ setzt,

$$G \cdot \tfrac{1}{2} = \text{Const.} + \log \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}$$

Substituirt man diesen Werth in 23) und berücksichtigt die Gleichung $\Pi \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, so erhält man

$$59)\quad H \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \log \pi - \text{Const.}$$

Aus 22) folgt aber, wenn man statt R seinen Werth $\frac{y}{e^y - 1} - 1 + \frac{y}{2}$ setzt,

$$H \tfrac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{e^y - 1} - \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y} + \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y} \right)$$

oder, wenn man $2y$ statt y setzt,

$$H \tfrac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{e^{-y}}{e^{2y} - 1} - \frac{e^{-y}}{2y} + \frac{e^{-y}}{2} \right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{e^{-y}}{e^{2y} - 1} - \frac{e^{-y}}{2y} - \frac{e^{-y}}{2} + e^{-y} \right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{e^{y}}{e^{2y} - 1} - \frac{e^{-y}}{2y} - \frac{e^{-y}}{2} \right)$$

Da aber $\frac{e^y}{e^{2y} - 1} = \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{2y} - 1}$, so kann man statt der letzten Gleichung auch schreiben

$$60)\quad H \tfrac{1}{2} = \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{2y} - 1} + \frac{e^{-y}}{2y} - \frac{e^{-y}}{y} - \frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y} - \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y} \right)$$

Nun haben die zwei Integrale

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{1}{e^y - 1} - \frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y} \right)$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{1}{e^{2y} - 1} - \frac{e^{-y}}{2y} \right)$$

offenbar denselben Werth, da man das zweite aus dem ersten erhält, wenn man $2y$ statt y setzt. Mithin ist

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{1}{e^y-1}-\frac{1}{e^{2y}-1}-\frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y}+\frac{e^{-y}}{2y}\right)=0$$

In Folge dieser Gleichung verwandelt sich also die Gleichung 60) in

$$H\tfrac{1}{2}=\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}y}}{y}-\tfrac{1}{2}e^{-y}-\frac{e^{-y}}{y}\right)$$

und daher nach 58)

$$61)\quad H\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\log 2$$

Aus dem Vergleich der Formeln 59) und 61) ergiebt sich mithin

$$\text{Const.}=\tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

wie bewiesen werden sollte.

Setzt man für x den Werth 1, so folgt noch aus 18)

$$G.1=\text{Const.}-1=\tfrac{1}{2}\log 2\pi-1$$

mithin $H.1=1-\tfrac{1}{2}\log 2\pi$

und aus 21)

$$62)\quad \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\tfrac{1}{2}e^{-y}+\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{e^y-1}\right)$$

$$=\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{e^{-y}}{y}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{-y}+1}{e^y-1}\right)=\tfrac{1}{2}\log 2\pi-1$$

folglich, da $\int_0^\infty e^{-y}\,dy=1$

$$\tfrac{1}{2}\log 2\pi=\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{e^{-y}}{y}-ye^{-y}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{-y}+1}{e^y-1}\right)$$

Setzt man in 57) statt x den Werth 1 und statt a den Werth Null, so hat man

$$63)\quad \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y}+\frac{e^{-y}}{y}-\frac{1}{y}\right)=-1$$

Diese Gleichung mit 62) verbunden giebt also

$$64)\quad \tfrac{1}{2}\log.2\pi=\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{1}{y}-\tfrac{1}{2}e^{-y}-\frac{1}{e^y-1}\right)$$

15. Wenn man in Formel 2) statt x allmälich die Werthe $x-\frac{1}{n}$, $x-\frac{2}{n}$ ... $x-\frac{n-1}{n}$ substituirt, so ergiebt sich

$$\log \Pi x + \log \Pi(x-\frac{1}{n}) + \log \Pi(x-\frac{2}{n}) \ldots + \log \Pi(x-\frac{n-1}{n}) =$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{y}\left(nx-\frac{n-1}{2}-\frac{n}{1-e^{-y}}-\frac{e^{-(x-1)y}}{1-e^{\frac{1}{n}y}}\right)$$

Aus derselben Formel folgt

$$\log \Pi nx = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{y}\left(nx-\frac{1}{1-e^{-y}}+\frac{e^{-nxy}}{1-e^{-y}}\right)$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab und setzt zur Abkürzung

$$\log\left[\frac{\Pi x \,.\, \Pi(x-\frac{1}{n}) \ldots . \Pi(x-\frac{n-1}{n})}{\Pi nx}\right] = D$$

so ist mithin

$$D = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{y}\left(-\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{1-e^{-y}}-\frac{e^{-(x-1)y}}{1-e^{\frac{1}{n}y}}-\frac{e^{-nxy}}{1-e^{-y}}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{y}\Big[(n-1)\left(-\tfrac{1}{2}e^{-y}-\frac{1}{e^{y}-1}\right)$$

$$-\left(\frac{e^{-xy}}{1-e^{\frac{1}{n}y}}-\frac{e^{-nxy}}{1-e^{y}}\right)\Big]$$

und, wenn man die Formel 64) berücksichtigt,

$$65)\quad D = \frac{n-1}{2}\log . \,2\pi -$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{n-1}{y}+\frac{e^{-xy}}{1-e^{\frac{1}{n}y}}-\frac{e^{-nxy}}{1-e^{y}}\right)$$

Um den Werth des Integrals zu finden, das in diesem Ausdrucke vorkommt, bemerke man nun Folgendes. Aus der elementaren Formel

$$66)\quad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} - \frac{n\,e^{-ny}}{1-e^{-ny}}\right) dy = \log.n$$

folgt auch

$$67)\quad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}} - \frac{n\,e^{-nxy}}{1-e^{-ny}}\right) dy = \log.n$$

Setzt man nämlich statt x einen anderen Werth z, so hat man jedenfalls

$$68)\quad \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}} - \frac{ne^{-nxy}}{1-e^{-ny}} - \frac{e^{-zy}}{1-e^{-y}} + \frac{ne^{-nzy}}{1-e^{-ny}}\right) dy = o$$

wie man leicht findet, wenn man dieses Integral in der Gestalt

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}} - \frac{e^{-zy}}{1-e^{-y}}\right) dy$$

$$- n\int_0^\infty \left(\frac{e^{-nxy}}{1-e^{-ny}} - \frac{e^{-nzy}}{1-e^{-ny}}\right) dy = o$$

schreibt, da das erste Integral, welches in diesem Ausdrucke vorkommt, in das zweite übergeht, wenn man in dem ersten ny statt y setzt. Die Formel 67) ergiebt sich daher unmittelbar aus der Formel 68), wenn man in der letzteren $z = 1$ setzt, wie ich schon früher gezeigt habe [1]. Multiplicirt man nun die Gleichung 67) mit dx und integrirt zwischen den Grenzen $x = x$ und $x = o$, so hat man

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-(x-1)y}}{1-e^{y}} - \frac{e^{-(x-1)ny}}{1-e^{ny}} - \frac{e^{y}}{1-e^{y}} + \frac{e^{ny}}{1-e^{ny}}\right) \frac{dy}{y} = x \log. n$$

oder, wenn man $x+1$ statt x setzt,

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-xy}}{1-e^{y}} - \frac{e^{-nxy}}{1-e^{ny}} - \frac{e^{y}}{1-e^{y}} + \frac{e^{ny}}{1-e^{ny}}\right) \frac{dy}{y} = (x+1) \log. n$$

[1] Crelle Journ. f. d. Math. Bd. 21. S. 377.

und, wenn man in dieser Gleichung nx statt x und $\frac{y}{n}$ statt y setzt,

$$\int_0^\infty \Big(\frac{e^{-xy}}{1-e^{\frac{1}{n}y}} - \frac{e^{-nxy}}{1-e^{y}} - \frac{e^{\frac{1}{n}y}}{1-e^{\frac{1}{n}y}} + \frac{e^{y}}{1-e^{y}} \Big) \frac{dy}{y} = (nx+1) \log. n$$

In Folge dieser Gleichung verwandelt sich also die Formel 65) in

$$D = \frac{n-1}{2} \log 2\pi - (nx+1) \log n + E$$

wo

$$E = \int_0^\infty \Big(\frac{e^{y}}{1-e^{y}} - \frac{e^{\frac{1}{n}y}}{1-e^{\frac{1}{n}y}} - \frac{n-1}{y} \Big) \frac{dy}{y}$$

Schreibt man den letzteren Ausdruck in folgender Gestalt

$$E = \int_0^\infty \Big(\frac{e^{y}}{1-e^{y}} + \frac{1}{y} \Big) \frac{dy}{y} - \int_0^\infty \Big(\frac{e^{\frac{1}{n}y}}{1-e^{\frac{1}{n}y}} + \frac{n}{y} \Big) \frac{dy}{y}$$

so kann man zwar bemerken, dass das erste der in diesem Ausdrucke enthaltenen Integrale in das zweite übergeht, wenn man $\frac{y}{n}$ statt y setzt, hieraus lässt sich aber Nichts schliessen, da beide Integrale unendlich gross werden. Nun setze man aber

$$E = \int_0^\infty \Big(\frac{e^{y}}{1-e^{y}} + \frac{1}{y} + \tfrac{1}{2} e^{-ny} \Big) \frac{dy}{y} - \int_0^\infty \Big(\frac{e^{\frac{1}{n}y}}{1-e^{\frac{1}{n}y}} + \frac{n}{y} + \tfrac{1}{2} e^{-y} \Big) \frac{dy}{y} + \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{y} (e^{-y} - e^{-ny})$$

so hat das erste der hier vorkommenden Integrale einen

bestimmten Werth und geht in das zweite über, wenn man $\frac{y}{n}$ statt y setzt; diese zwei Integrale heben sich also auf und es bleibt

$$E = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y}\,(e^{-y} - e^{-ny}) = \tfrac{1}{2}\log n$$

mithin

$$D = \log\left[\frac{\Pi x \,.\, \Pi\left(x - \frac{1}{n}\right) \,.\,.\,.\,.\, \Pi\left(x - \frac{n-1}{n}\right)}{\Pi n x}\right]$$

$$= \frac{n-1}{2}\log 2\pi - (nx + \tfrac{1}{2})\log n$$

Diese wichtige Formel hat bekanntlich zuerst Gauss gefunden und bewiesen. Später hat Dirichlet [1]) einen Beweis gegeben, der nur auf Integralrechnung beruht, jedoch hat er aus dem Gaussischen Beweise die Bestimmung einer durch die Integration eingeführten Constanten entlehnt. Einen anderen Beweis hat Cauchy [2]) gegeben, welcher die ihm eigenthümliche Residuenrechnung voraussetzt. Ich habe es versucht einen Beweis zu geben, welcher ebenfalls nur auf Integralrechnung beruht und zugleich unmittelbar aus den Fundamentalformeln der Theorie der Eulerschen Integrale folgt.

16. Will man die Moivre'sche Formel nicht als bekannt voraussetzen, so kann man die Gleichung 16) auch auf folgendem Wege ableiten. Man gehe von der Definition aus

$$69)\qquad B_n = \frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2n}{2^{2n-1}\,.\,\pi}\,\mathbf{S}\frac{1}{1^{2n}}$$

wo $\mathbf{S}\frac{1}{1^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots.$

ist. Nun folgt aus

---

1) Crelle Journ. für die Mathem. Bd. 15. S. 258 ff.

2) Exercices d'Analyse etc. T. 2. pg. 408.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

wenn man $x^2 = u$ setzt,

$$\log\left(1 - \frac{u}{2.3} + \frac{u^2}{2.3.4.5} - \ldots\ldots\right) =$$

$$\log\left(1 - \frac{u}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{u}{2^2\pi^2}\right) + \ldots$$

und daher

$$70)\quad \log\left(1 - \frac{u}{2.3} + \frac{u^2}{2.3.4.5} + \ldots\right) =$$

$$- \frac{u}{\pi^2}\,\mathbf{S}\frac{1}{1^2} - \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{\pi^4}\,\mathbf{S}\frac{1}{1^4} - \tfrac{1}{3}\frac{u^4}{\pi^6}\,\mathbf{S}\frac{1}{1^6}\ldots$$

Setzt man aber

$$\log\,(1 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots) = a_1 u + a_2 u^2 + \ldots\ldots$$

so ist bekanntlich

$$n A_n = n a_n + (n-1) a_{n-1} A_1 + \ldots + a_1 A_{n-1}$$

Wendet man diese Recursionsformel auf 70) an, so folgt, nach gehöriger Substitution,

$$\mathbf{S}\frac{1}{1^{2n}} - \frac{\pi^2}{2.3}\,\mathbf{S}\frac{1}{1^{2n-2}}\ldots$$

$$\mp \frac{\pi^{2n-2}}{2.3\ldots(2n-1)}\,\mathbf{S}\frac{1}{1^2} \pm \frac{\pi^{2n}}{2.3\ldots(2n+1)}\quad n = o$$

und nach 69)

$$71)\quad \frac{2^{2n-1}B_n}{2.3..2n} - \frac{2^{2n-3}B_{n-1}}{2.3\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2.3}\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n\cdot\frac{n}{2.3\ldots(2n+1)} = o$$

was eine bekannte Relation zwischen den Bernoullischen Zahlen ausdrückt. Nimmt man andererseits die Gleichung

$$fy = \frac{e^y + 1}{2}\,f\,(2y)$$

und entwickelt fy und $f(2y)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz, so folgt

$$72)\quad 1-\tfrac{1}{2}y+\frac{f^2 o}{1.2}y^2+\ldots\frac{f^{2n} o}{2.3\ldots2n}y^{2n}+\ldots=$$
$$\left[1-y+\frac{f^2 o}{1.2}(2y)^2+\ldots\frac{f^{2n} o}{2.3\ldots2n}(2y)^{2n}+\ldots\right]$$
$$\left[1+\frac{y}{2}+\ldots\frac{y^{2n}}{2.2.3\ldots2n}+\ldots\right]$$

und hieraus, wenn man die Glieder, die mit y^{2n+1} multiplicirt sind, zusammenstellt,

$$\frac{2^{2n-1}f^{2n}o}{2.3\ldots2n}+\frac{2^{2n-3}f^{2n-2}o}{2.3\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2.3}\ldots$$
$$-\frac{n}{2.3\ldots(2n+1)}=o$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 71), so folgt die Gleichung 16).

17. Ich bemerke gelegentlich, dass man mit Hülfe dieser Gleichung nicht blos die meisten bekannten Relationen zwischen den Bernoullischen Zahlen, sondern auch mehrere neue mit Leichtigkeit ableiten kann. Zu den letzteren gehört die folgende

$$73)\quad \frac{(2^{2n}-1)B_n}{2.3\ldots2n}-\frac{2^{2n-3}}{2.3\ldots(2n-2)}\cdot\frac{B_{n-1}}{1.2}$$
$$+\frac{2^{2n-5}}{2.3\ldots(2n-4)}\cdot\frac{B_{n-2}}{2.3.4}\ldots+(-1)^n\frac{(n-\frac{1}{2})}{2.3\ldots2n}=o$$

welche man aus 72) findet, wenn man die Glieder, die mit y^{2n} multiplicirt sind, zusammenstellt.

Geht man von der Formel

$$f(-y)=e^y fy$$

aus, und entwickelt sowohl e^y als fy und $f(-y)$ nach aufsteigenden Potenzen von y, so führen die Coefficienten von y^{2n} zu der bereits bekannten Relation

$$74)\quad B_n-\frac{2n.2n-1}{3.4}B_{n-1}\ldots$$
$$+(-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+1.2n+2}=o$$

Die Coefficienten von y^{2n+1} würden wieder zu der Moivre'schen Formel führen.

Entwickelt man in ähnlicher Weise die Gleichung

$$(e^y + 1)\, f(-2y) = 2\, e^{2y} f y$$

so führen die Coefficienten von y^{2n} und y^{2n+1} zu den zwei neuen Relationen

$$75)\quad (2^{2n} - 1) B_n - (2^{2n-5} - 1) 2^2 . \frac{2n . 2n-1}{1 . 2} B_{n-1}$$
$$+ (2^{2n-9} - 1)\, 2^4 . \frac{2n \ldots 2n-3}{2 . 3 . 4} B_{n-2} + \ldots$$
$$= (-1)^n \left[n + \tfrac{1}{2} + 2^{2n-1} (n-2)\right]$$

und

$$76)\quad 2(2^{2n-2} - 1) B_n - 2^3 (2^{2n-6} - 1) \frac{2n . 2n-1}{2 . 3} B_{n-1}$$
$$+ 2^5 (2^{2n-10} - 1) \frac{2n .. 2n-3}{2 . 3 . 4 . 5} B_{n-2} + \ldots$$
$$= (-1)^n \left[\frac{1}{2^n+1} (\tfrac{1}{2} - 2^{2n+1}) + \tfrac{1}{2} (1 + 2^{2n})\right]$$

Zieht man 73) von 75) ab, so findet man nach gehöriger Reduktion,

$$77)\quad B_n - 2^2 . \frac{2n . 2n-1}{3 . 4} B_{n-1}$$
$$+ 2^4 . \frac{2n \ldots 2n-3}{3 . 4 . 5 . 6} B_{n-2} - \ldots$$
$$= (-1)^{n+1} . \frac{n+1 + 2^{2n} (n-1)}{2n+1 . 2n+2}$$

Zieht man 76) von 71) ab, so folgt

$$78)\quad B_n - 2^2 . \frac{2n . 2n-1}{2 . 3} B_{n-1}$$
$$+ 2^4 . \frac{2n \ldots 2n-3}{2 . 3 . 4 . 5} B_{n-2} \ldots .$$
$$= (-1)^{n+1} . \left[\tfrac{1}{2} + 2^{2n-2} - \frac{2^{2n}}{2n+1}\right]$$

Auf demselben Wege liessen sich noch verwickeltere Relationen finden, z. B. wenn man von der Gleichung

$$f(2y) = 2(fy)^2 - 2 fy\, f(2y)$$

ausginge.

18. Die Werthe von ψx und log. Πx können, wie bereits Binet und Cauchy gezeigt haben, durch verschiedene convergirende Reihen ausgedrückt werden. Diese Reihen lassen sich nicht bloss leicht aus den vorhergehenden Formeln ableiten, sondern auch noch durch einige andere vermehren. Es wurde früher $R = \frac{y(e^y+1)}{2(e^y-1)} - 1$ gesetzt, statt dessen schreibe man $\frac{y(e^y+1) - 2(e^y-1)}{2(e^y-1)}$ und entwickele den Zähler nach Potenzen von y, so hat man

$$79)\quad R = \frac{1}{2(e^y-1)}\left[\frac{y^3}{2.3} + \frac{2y^4}{2.3.4} + \frac{3y^5}{2.3.4.5}\cdots\right]$$

Substituirt man diesen Werth in $\int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-xy} . R$, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf die Formel 19), die Formel

$$80)\quad \int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-xy} R =$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3} \mathbf{S} \frac{1}{(x+1)^3} + \tfrac{2}{4} \mathbf{S} \frac{1}{(x+1)^4} + \tfrac{3}{5} \mathbf{S} \frac{1}{(x+1)^5}\cdots\right]$$

Eine zweite Formel ergiebt sich, wenn man

$$y(e^y+1) - 2(e^y-1) = e^y[y(e^{-y}+1) + 2(e^{-y}-1)]$$

setzt. Denn hieraus folgt

$$81)\quad R = \frac{e^y}{2(e^y-1)}\left[\frac{y^3}{2.3} - \frac{2y^4}{2.3.4} + \frac{3y^5}{2.3.4.5} - \cdots\right]$$

und, wenn $x > 1$

$$82)\quad \int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-xy} R =$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3} \mathbf{S} \frac{1}{x^3} - \tfrac{2}{4} \mathbf{S} \frac{1}{x^4} + \tfrac{3}{5} \mathbf{S} \frac{1}{x^5} - \cdots\right]$$

Verbindet man 80) und 82) durch Addition und bemerkt, dass

$$\tfrac{1}{2} \log. \frac{x}{x+1} + \tfrac{1}{4} . \frac{2x+1}{x . x+1} =$$

$$\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{3} . \frac{1}{x^3} - \tfrac{2}{4} . \frac{1}{x^4} + \tfrac{3}{5} . \frac{1}{x^5} \cdots\right]$$

so findet man für $x > 1$ noch eine dritte Formel, nämlich

83) $\int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{-xy} \,.\, R = \frac{1}{2} \log. \frac{x}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x+1}{x\,.\,x+1}$

$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{5} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^5} + \frac{5}{7} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^7} + .. \right]$

Verbindet man die Formeln 80), 82) und 83) mit der Formel 10), so ergiebt sich mithin

84) $\psi x = \log x + \frac{1}{2x}$

$- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{4} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^4} + \ldots \right]$[1]

und, wenn $x > 1$

85) $\psi x = \log x + \frac{1}{2x}$

$- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \mathsf{S} \frac{1}{x^3} - \frac{2}{4} \mathsf{S} \frac{1}{x^4} + \ldots \right]$

oder auch

86) $\psi x = \frac{1}{2} \log [x(x+1)] + \frac{1}{4x(x+1)}$

$- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{5} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^5} + \ldots \right]$

Nimmt man nun noch die zwei bekannten Formeln [2])

87) $\frac{1}{x} = \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^2} + \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots .$

88) $\frac{1}{x} = \mathsf{S} \frac{1}{x^2} - \mathsf{S} \frac{1}{x^3} + \mathsf{S} \frac{1}{x^4} - \ldots$

zu Hülfe, von welchen die zweite nur für $x > 1$ gilt, so kann man noch andere Werthe für ψx finden. Namentlich giebt die Verbindung von 84) mit 87)

89) $\psi x = \log x + \frac{1}{2} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \mathsf{S} \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots$

---

[1]) Diese Formel hat schon Binet in etwas veränderter Gestalt gefunden. S. Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes in dem Journ. de l'école polytechn. T. 16. pg. 249. Dasselbe gilt von unserer Formel 80), welche man a. a. O. p. 248 findet.

[2]). Vergl. Crelle's Journ. für d. Mathem. Bd. 14. S. 76.

oder, wenn man $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}$ statt $\frac{1}{2x}$ schreibt,

$$90)\quad \psi x = \log x + \frac{1}{x}$$
$$- \tfrac{1}{2} S \frac{1}{(x+1)^2} - \tfrac{2}{3} S \frac{1}{(x+1)^3} - \tfrac{3}{4} S \frac{1}{(x+1)^4} + \ldots.$$

Verbindet man 85) mit 88), so findet man

$$91)\quad \psi x = \log x + \tfrac{1}{2} S \frac{1}{x^2} - \tfrac{2}{3} S \frac{1}{x^3} + \tfrac{3}{4} S \frac{1}{x^4} + \ldots.$$

oder

$$92)\quad \psi x = \log x + \frac{1}{x} - \tfrac{1}{2} S \frac{1}{x^2} + \tfrac{1}{3} S \frac{1}{x^3} - \tfrac{1}{4} S \frac{1}{x^4} + \ldots$$

Auf ähnliche Weise findet man auch mehrere Reihen, die den Werth von log. Πx angeben. Namentlich ergiebt sich, wenn man den Werth von R aus 79) in 22) substituirt, und die Formeln 23) und 24) berücksichtigt,

$$93)\quad \log. \Pi x = (x + \tfrac{1}{2}) \log x - x + \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$
$$+ \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} S \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{3.4} S \frac{1}{(1+x)^3} + \ldots \right]$$

Wendet man dagegen die Formel 81) zu demselben Zwecke an, so folgt für $x > 1$

$$94)\quad \log. \Pi x = (x + \tfrac{1}{2}) \log x - x + \tfrac{1}{2} \log 2\pi$$
$$+ \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} S \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3.4} S \frac{1}{x^3} + \frac{3}{4.5} S \frac{1}{x^4} \right]$$

Verbindet man 93) und 94) durch Addition und berücksichtigt die Gleichung

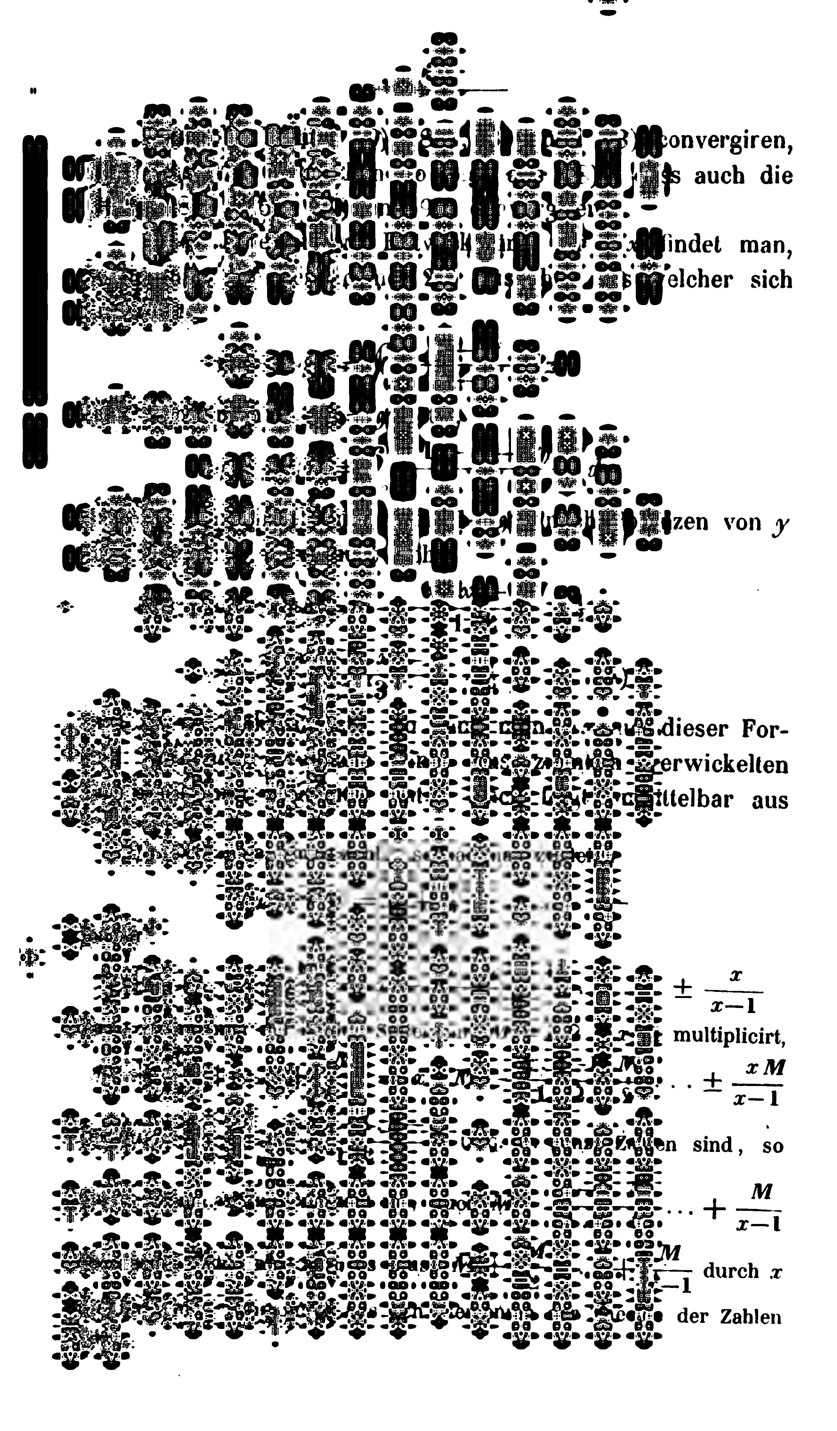
$$(x + \tfrac{1}{2}) \log \frac{1+x}{x} - 1 = \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3.4} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{3}{4.5} \cdot \frac{1}{x^4} \ldots \right]$$

so erhält man die Formel

$$95)\quad \log. \Pi x = (x + \tfrac{1}{2}) \log \left[x(x+1) \right]^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} (\log 2\pi - 1)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} S \frac{1}{(1+x^2)} + \frac{3}{4.5} S \frac{1}{(1+x)^4} + \ldots \right]$$

Die Formel 93) hat schon Binet gefunden [1]), und später Cauchy die Formel 94) [2]).

[1]) a. a. O. pg. 226. [2]) Exercices d'analyse T. 2. pg. 388.



convergiren,

s auch die

findet man,

elcher sich

zen von y

dieser For-

erwickelten

ittelbar aus

$\pm \frac{x}{x-1}$

multiplicirt,

$\ldots \pm \frac{xM}{x-1}$

n sind, so

$\ldots + \frac{M}{x-1}$

$\frac{M}{x-1}$ durch x

der Zahlen

dieser Formel ein schon bekanntes Resultat, dass nämlich für $x = o$ der Ausdruck

$$\frac{\psi x - \psi o}{x} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

ist.

Wollte man die Reihe 96) nach Potenzen von x ordnen, so dass

$$\psi x - \psi o = A_1 x - A_2 x^2 + \ldots.$$

so ergäbe sich unmittelbar $A_1 = S \frac{1}{1^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Die folgenden Coefficienten liessen sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden ableiten. Aus 1) folgt nämlich

$$\psi x - \psi o = \int_o^\infty \frac{1 - e^{-xy}}{e^y - 1}$$

Entwickelt man nun e^{-xy} nach Potenzen von y, so findet man

$$\psi x - \psi o = S \frac{1}{1^2} \cdot x - S \frac{1}{1^3} x^2 + S \frac{1}{1^4} x^3 - \ldots.$$

welche Formel zur Berechnung von ψx dienen kann, wenn $x < 1$, und hieraus folgt

$$A_m = S \frac{1}{1^{m+1}}$$

Druck von E. A. Huth in Göttingen.

